Relaciones de Equivalencia

M. C. Jorge Antonio García Galicia.

11 de agosto del 2011

Relación de equivalencia

Definición: (Relación de equivalencia)

Una relación R en un conjunto A es llamada una relación de equivalencia si satisface las siguientes propiedades.

- aRa *para todo* $a \in A$.
- aRb *implica que* bRa *para todos* $a, b \in A$.
- aRb *y* bRc *implican que* aRc *para todos* $a, b, c \in R$.

Una relación es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos

- "Es igual a" en el conjunto de todos los enteros.
- "Al dividirse entre el entero positivo m, tiene el mismo residuo que" en el conjunto de todos los enteros.
- "Es paralela o coincide con" en el conjunto de todas las lineas del plano.
- "Es congruente con" en el conjunto de todos los triángulos en el plano.
- "Tiene el mismo nombre que" en el conjunto de todas las personas que tienen nombre.
- "Tiene el mismo número de páginas que" en el conjunto de todos los libros.

Clases de equivalencia

Definición: (Clase de equivalencia)

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Entonces para todo $a \in A$ definimos un subconjunto como sigue:

$$[a] = \{x | x \in A,\ xRa\}$$

Los conjuntos $[a]$, $a \in A$ son llamados clases de equivalencia.

Dado que R es una relación de equivalencia, R es reflexiva y por lo tanto $a \in [a]$.

Partición de un conjunto

Definición: (Partición de un conjunto)

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *subconjuntos de un conjunto no vacío* A*, tales que:*

- $A_i \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ *cuando* $i \neq j$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

Entonces al conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *se le llama una partición de* A.

Resultado Importante

Teorema:

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Entonces el conjunto $S = \{[a] | a \in A\}$ de las clases de equivalencia es una partición del conjunto A.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2),$$

$$(3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,6)\}$$

- Se puede mostrar que R es una relación de equivalencia en A.
- Por lo tanto, $\{[a] | a \in A\}$ es una partición del conjunto A.

$$\{[a] | a \in A\} = \{[1], [2], [3], [4], [5], [6]\} = \{[1], [4], [6]\}$$

Ilustración del ejemplo

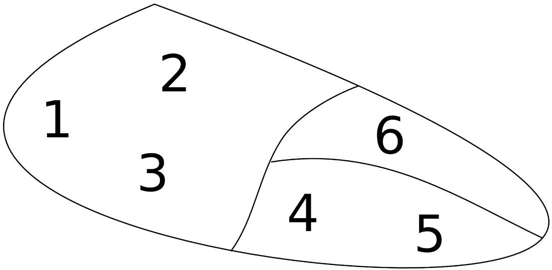

Figura: Ejemplo gráfico de como podría verse una partición de un conjunto en clases de equivalencia.

Módulos y congruencias

Definición: (División en enteros)

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Y sean $m, d \in \mathbb{Z}$, con $d \neq 0$. Diremos que d divide a m si existe algún $q \in \mathbb{Z}$ tal que $m = dq$. Y lo denotaremos $d \mid m$.

Definición: (Congruencia)

Sean $a, b, n \in \mathbb{Z}$ donde $n \geqslant 2$, se dice que a es congruente con b en módulo m, si $n \mid (a - b)$ y lo denotaremos como $a \equiv b \pmod{n}$

La congruencia como relación de equivalencia

Teorema:

Sea $n \geqslant 2$ un entero. La relación "es congruente con" en módulo n, es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$

Los enteros módulo n

- Al conjunto de las clases de equivalencia resultado del teorema anterior se les llama los enteros módulo n y se le denota por $\mathbb{Z}_n$ o $\mathbb{Z} \mid (n)$.

Si $n = 5$, entonces $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$, donde:

$$
\begin{array}{rcl}
[0] & = & \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots\} \\
[1] & = & \{1, -4, 6, -9, \ldots\} \\
[2] & = & \{2, -3, 7, -8, \ldots\} \\
[3] & = & \{3, -2, 8, -7, \ldots\} \\
[4] & = & \{4, -1, 9, -6, \ldots\}
\end{array}
$$

Ejercicios I

1. Sea A el conjunto de toda la gente, y sea R la relación "nació el mismo año que" en el conjunto A. Demuestra que R es una relación de equivalencia en A. Describe los elementos del conjunto $\{[a] | a \in A\}$.
2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y suponga que R es una relación de equivalencia en A. Si $1R3$, $3R4$, $2R6$ y $|\{[a]|a \in A\}| = 3$. Determina los elementos de R y determina también las clases de equivalencia de este caso.
3. Sea A un conjunto no vacío, sea R una relación en A con la propiedad de que aRb para cualquiera $a, b \in A$ (a y b no tienen por que ser distintos). Muestra que R es una relación de equivalencia en A. Determina las clases de equivalencia.
4. Describe a los conjuntos $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3$.