

Árboles

M. C Jorge García.

Definición: (Árbol)

Un **árbol** es un grafo conexo G que no contiene ningún ciclo.

Definición: (Bosque)

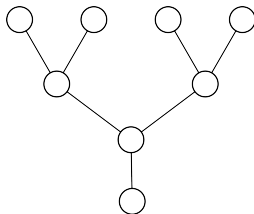
Un **bosque** es un grafo G que no contiene ningún ciclo.

- Se sigue de las definiciones de arriba que un bosque G es un grafo, tal que cada componente de G es un árbol.
- A los vértices v tales que $\deg v = 1$ de un árbol, se les llama **hojas**.
- A las aristas que inciden en las hojas se les llama **aristas pendientes**.

- Probablemente la clase de grafos más estudiados en las ciencias de la computación sean los árboles.
- Los árboles son útiles como estructuras de datos, en la investigación de operaciones, en la teoría de juegos, en el análisis de decisiones, en el análisis de algoritmos, etc.
- Varias clases de árboles tienen aplicaciones teóricas importantes:
 - Árboles binarios.
 - Árboles de expansión.
 - Árboles de decisión.
 - Árboles de juegos.
 - Árboles con raíz.



(a) Arbol



(b) Grafo

Figura: Árboles

Teorema:

Sea G un árbol y $u, v \in V(G)$. Entonces hay exactamente una uv -trayectoria.

Teorema:

Sea G un grafo de orden p y tamaño q y sean $u, v \in V(G)$ tal que hay exactamente una uv -trayectoria en G . Entonces $q = p - 1$.

Teorema:

Sea un grafo conexo G tal que $q = p - 1$ entonces no hay ciclos en G .

Teorema:

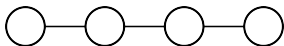
Sea G una gráfica $G(p, q)$ que no tiene ciclos y $q = p - 1$. Entonces G es conexa.

Corolario:

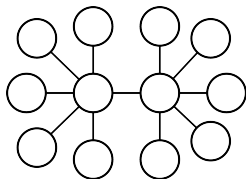
Sea G un grafo de orden p y tamaño q , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *G es un árbol.*
- *G es conexa y no tiene ciclos.*
- *Entre todo par de vértices de G hay exactamente una trayectoria.*
- *G es conexa y $q = p - 1$*
- *G no tiene ciclos y $q = p - 1$.*
- *G es conexa y toda arista $e \in E(G)$ es un puente.*

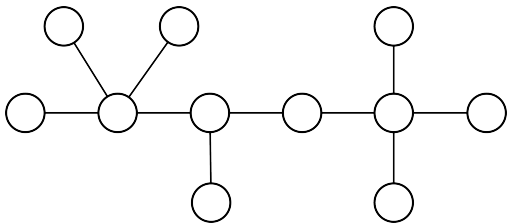
- Hay muchos grafos que ya conocíamos que son arboles:
 - Las trayectorias T_p .
 - Los grafos bipartitos completos $K_1^s = K_s^1$ también llamados estrellas.
- Un árbol se llama una **estrella doble**, si contiene exactamente dos vértices que no son hojas. Estos vértices necesariamente son adyacentes.
- Un **caterpillar** es un árbol tal que al remover todas las hojas resulta en una trayectoria. A la trayectoria se le llama la columna del caterpillar.



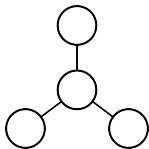
(a) T_4



(b) Estrella doble



(c) Caterpillar



(d) $K_1^3 = K_3^1$

Figura: Algunos ejemplos de árboles