Introducción a la teoría cromática

M. C Jorge García.

Definición: (Coloración)

Sea G un grafo, una coloración es una función $h: V(G) \to \mathbb{N}$ tal que si $u, v \in V(G)$ son vértices adyacentes entonces $h(u) \neq h(v)$.

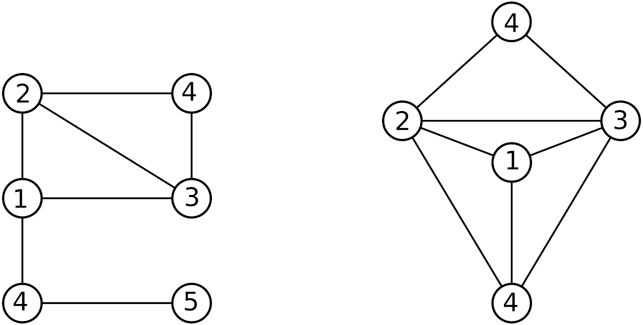
- Si h es una coloración de G al rango o contradominio de h se le llama el conjunto de colores. Y a cada elemento del rango de de h se le llama color.

Definición: (n-coloración)

Una n-coloración es una coloración de un grafo G usando solamente n colores.

- Siempre es posible encontrar una p-coloración en un grafo de orden p.

Ejemplo I

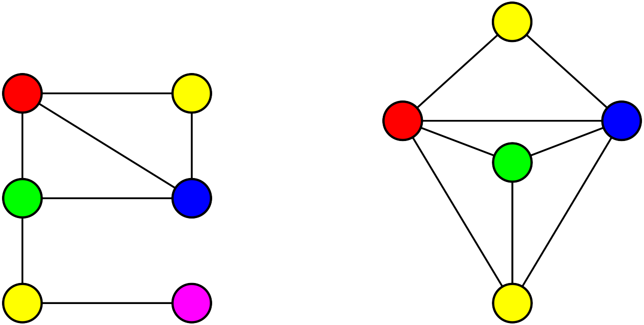


(a) G_1 (b) G_2

Figura: Una 5-coloración de G_1 y una 4-coloración de G_2.

- A menudo una coloración se representa en el dibujo coloreando los vértices del grafo.

Ejemplo II



(a) G_1 (b) G_2

Figura: Mismas coloraciones sobre los grafos de la figura anterior.

Número cromático

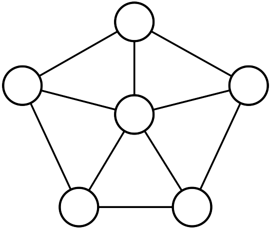
- Ya dijimos que en todo grafo de orden p hay una p-coloración.
- Es mas interesante buscar k-coloraciones en un grafo de orden p donde $k < p$.
- Para colorear a un grafo completo K_p, se requieren p-colores al menos.

Definición: (Número cromático)

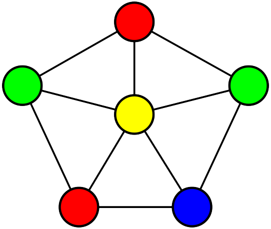
Sea G un grafo. El numero cromático de G, denotado como $\chi(G)$, es el mínimo valor de n para el cual existe una n-coloración de G.

- No existe un buen algoritmo para determinar el número cromático de un grafo.
- Determinar si en un grafo G hay una k coloración es un problema NP-completo.
- Determinar el número cromático de un grafo G es un problema NP-duro.

Ejemplo



(a) H



(b) Una 4-coloración de H

Figura: Para el grafo H el numero cromático es $\chi(H) = 4$.

Clanes

Definición: (Clan)

Sea G un grafo y sea $H \subseteq G$, si H es isomorfo a K_n, para algún n. Entonces H se llama un clan en G.

- A los clanes a menudo se les llama cliques.
- A un clan de orden p se le llama un p-clan o un p-clique.
- Todo grafo contiene a K_1 como su clan. Y todo grafo no vacío contiene a K_2 como su clan.

Definición: (Número clique)

Sea G un grafo. El numero clique o numero clan de G, denotado como $\omega(G)$, es el máximo número n para el cual existe un n-clan de G.

Cotas del número cromático

Teorema:

Para todo grafo G:

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

- Para todo grafo G es claro que $\omega(G) \leqslant \chi(G)$.

Teorema: (de Brooks)

Para todo grafo conexo G:

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G)$$

A menos que G sea isomorfo a C_p con $p \equiv 1 \pmod 2$ o G sea isomorfo a K_p, en cuyo caso $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Conclusiones

Corolario:

Para todo grafo conexo G que no es un ciclo, ni un grafo completo:

$$\omega(G) \leqslant \chi(G) \leqslant \Delta(G)$$

- Todos los grafos k-partitos son k-coloreables. Y para los k-partitos completos $\chi = k$.
- Actualmente, la rama mas estudiada en teoría de grafos es la teoría cromática.
- También se investigan coloreos de las aristas y de las regiones de los grafos planos. Se sabe que esos dos problemas son duales al problema del coloreo tradicional.
- Se investigan otros tipos de coloraciones con diferentes restricciones a la función h de coloreo.
- Un magnifico libro para aprender teoría cromática es el de Chartrand.