Grafos conexos

M. C Jorge García.

Subgrafo

Definición: (Subgrafo)

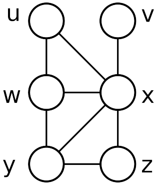
Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

- Algunas veces por contexto si un grafo H es subgrafo de un grafo G y existe un grafo I isomorfo a H, diremos que I también es subgrafo de G.

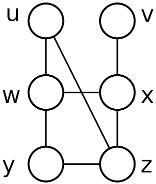
Notación extra

- Si H es un subgrafo de G y además $V(H) = V(G)$ diremos que H es un subgrafo de expansión de G.
- Si H es un subgrafo de G y además $V(H) \subset V(G)$ o $E(H) \subset E(G)$, entonces diremos que H es un subgrafo propio de G.
- Un subgrafo H de G es un subgrafo inducido si dos vértices $u, v \in V(H)$ son adyacentes si y solo si u y v son adyacentes en G.
- Si H es un subgrafo inducido de G y $S = V(H)$ una manera de denotar a H es $G[S]$.

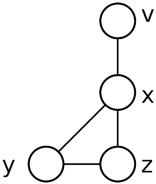
Ejemplo



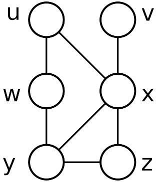
(a) G



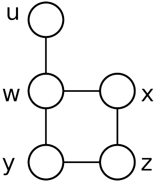
(b) H_1



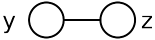
(c) H_2



(d) H_3



(e) H_4



(f) H_5

Caminos

Definición: (camino)

Sea G un grafo. Dados dos vértices $u, v \in V(G)$, un uv-camino es una sucesión $W : v_0 = u, v_0v_1, v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k, v_k = v$ de vértices y aristas de G que comienza con u y termina con v tal que v_i es adyacente en G con v_{i+1} para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

- Por definición el camino es la sucesión de vértices y aristas.
- Aunque por practicidad, dada la naturaleza del grafo, al listar el camino solo listamos los vértices. (Los aristas son claras por contexto).

Longitud del camino

Definición: (Longitud del camino)

Sea G un grafo y W un camino en G. El número de aristas en W (incluyendo multiplicidad) es la longitud de W.

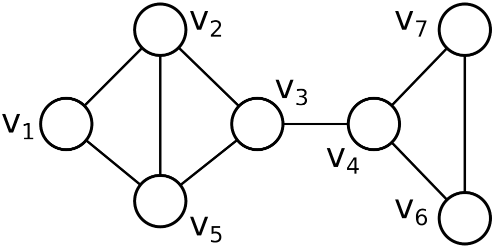


Figura: Un posible camino en el grafo de la figura es $W = v_5, v_3, v_4, v_6, v_7, v_4, v_3, v_2$ y tiene longitud 7

Paseos y trayectorias

Definición: (Paseo)

Sea G un grafo con $u, v \in V(G)$ y W un uv-camino en G. Si en W no se repite ninguna arista se dice que W es un paseo en G.

Definición: (Trayectoria)

Sea G un grafo con $u, v \in V(G)$ y W un uv-camino en G. Si en W no se repite ningún vértice se dice que W es una trayectoria en G.

Observación

- Todos los paseos son caminos.
- Todas las trayectorias son paseos.
- Aunque los grafos tienen un conjunto de vértices finito, y por ende un conjunto de aristas finito. Puede haber un número infinito de caminos entre un par de vértices.

Caminos cerrados

Definición: (Camino cerrado)

Sea G un grafo. Un uv-camino donde $u = v$. (Es decir termina en el mismo vértice donde empezó) es un camino cerrado.

- Un camino puede consistir en un solo vértice. A tal camino se le llama camino trivial y su longitud es cero.
- Un camino trivial es un camino cerrado.
- Un camino cerrado que no repite ninguna arista también se llama paseo cerrado.
- Un paseo cerrado cuya longitud es al menos tres, se le llama también un circuito.

Ciclos

Definición: (Ciclo)

Un circuito $C: v_0 = v, v_1, \ldots, v_k = v$ con $k \geqslant 2$ para el que todos los vértices v_i con $0 \leqslant i \leqslant k-1$ son distintos se llama ciclo.

- Al ciclo de longitud k se llama un k-ciclo.
- A un 3-ciclo también se le llama triangulo.
- A un k-ciclo se le llama ciclo par si $k \equiv 0 \pmod 2$ o se le llama ciclo non si $k \equiv 1 \pmod 2$

Ejemplo:

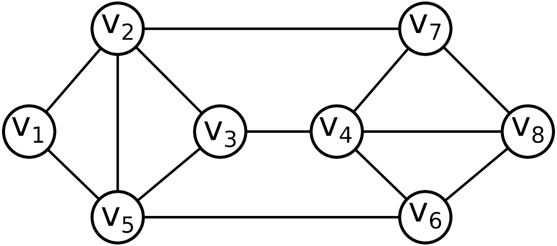
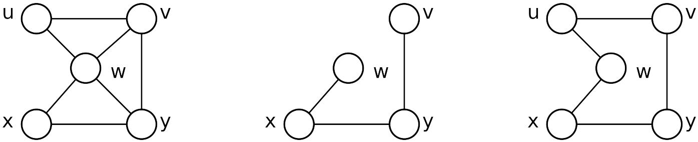


Figura: ¿Qué caminos, o paseos o trayectorias hay en el grafo? ¿Qué ciclos o circuitos?

Notación

- Las trayectorias y los ciclos definen subgrafos. A veces nos referiremos a estos subrgafos como la trayectoria o el ciclo.



(a) G (b) P (c) C

Figura: La trayectoria $P: v, y, x, w$ y el ciclo $C: w, x, y, v, u, w$ también pueden representarse como subgrafos

Relación entre caminos y trayectorias

Teorema:

Si un grafo G contiene un uv-camino, entonces contiene también una uv-trayectoria.

Teorema:

Si un grafo G contiene un circuito, entonces contiene también un ciclo.

Conectividad

Definición: (Vértices conectados)

Sea G un grafo y $u, v \in V(G)$. Se dice que u y v están conectados *si existe al menos un uv-camino.*

Definición: (Grafo conexo)

Se dice que un grafo G es conexo*, si cada par de vértices $u, v \in V(G)$ esta conectado.*

Componente

Definición: (Componente)

Un subgrafo conexo H de G es un componente de G si H no es un subgrafo propio de algún subgrafo conexo de G.

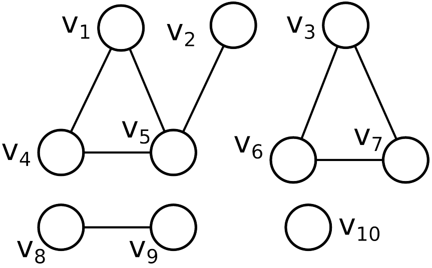


Figura: Este grafo tiene cuatro componentes.

Distancia

Definición: (Distancia)

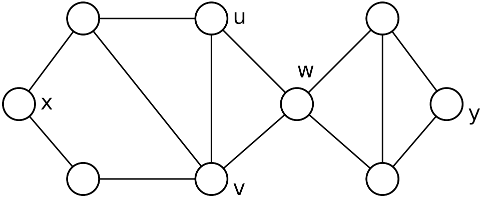
Sea G un grafo conexo. Dados dos vértices $u, v \in V(G)$, la distancia entre u y v, es la longitud de la trayectoria mínima entre u y v. Y se denota $d(u, v)$.

- De entre todos los caminos entre u y v en G a aquellos cuya longitud es $d(u, v)$ los llamamos geodésicas.
- La excentricidad $e(v)$ de un vértice v es el número $\max_{u \in V(G)} d(v, u)$.

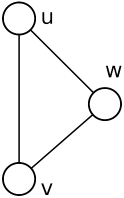
Radio, Diámetro y centro

- El radio de un grafo conexo G es la mínima de entre todas las excentricidades de sus vértices. Se denota $\operatorname{rad} G$.
- El diámetro de un grafo conexo G es la máxima de entre todas las excentricidades de sus vértices. Se denota $\operatorname{diam} G$.
- Un vértice $v \in V(G)$ es un vértice central si $e(v) = \operatorname{rad} G$.
- El centro de G es el subgrafo inducido por todos los vértices centrales de G. Se denota $\operatorname{Cen} G$
- Un vértice $v \in V(G)$ es un vértice periférico si $e(v) = \operatorname{diam} G$.
- La periferia de G es el subgrafo inducido por todos los vértices periféricos de G. Se denota $\operatorname{Per} G$

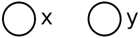
Ejemplo



(a) G



(b) $\operatorname{Cen} G$



(c) $\operatorname{Per} G$

Figura: El grafo G tiene $\operatorname{rad} G = 3$ y $\operatorname{diam} G = 5$.

Distancia como métrica

La función distancia en $V(G)$ cumple las siguiente propiedades.

1. $d(u,v) \geqslant 0$ para todos $u, v \in V(G)$, y $d(u,v) = 0$ si y solo si $u = v$.
2. $d(u,v) = d(v,u)$ para todos $u, v \in V(G)$.
3. $d(u,v) + d(v,w) \geqslant d(u,w)$ para todos $u, v, w \in V(G)$.

Por lo tanto es una métrica. Y el conjunto $V(G)$ junto con la función d es un espacio métrico.

Teorema:

Para todo grafo conexo G.

$$\operatorname{rad} G \leqslant \operatorname{diam} G \leqslant 2 \operatorname{rad} G$$

Y estas cotas son justas.

Quitando elementos a los grafos

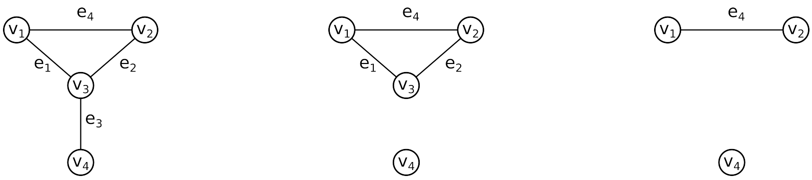
Definición: $(G - e)$

Si $e \in E(G)$ par algún grafo G, entonces $G - e$ es el subgrafo de G tal que $V(G) = V(G - e)$ y tiene todas las aristas de G menos e.

Definición: $(G - v)$

Si $v \in V(G)$ para algún grafo G de orden $p \geqslant 2$, entonces $G - v$ es el subgrafo de G cuyo conjunto de vértices son todos los vértices de G excepto v y cuyo conjunto de aristas son todas las aristas de G excepto aquellas que inciden en v.

Ejemplo



(a) G (b) $G - e_3$ (c) $G - v_3$

Figura: El grafo conexo G y los resultados después de aplicar $G - e_3$ y $G - v_3$

Definiciones

Definición: (Vértice de corte)

Sea G un grafo conexo. Un vértice $v \in V(G)$ es un vértice de corte si $G - v$ no es un grafo conexo.

Definición: (Puente)

Sea G un grafo conexo. Una arista $e \in E(G)$ es un puente si $G - e$ no es un grafo conexo.

Puentes

- Si v es un vértice de corte, entonces $G - v$ tiene al menos dos componentes.
- Si e es un puente, entonces $G - e$ tiene exactamente dos componentes.

Teorema:

Sea G un grafo conexo. Una arista $e \in E(G)$ es un puente si y solo si e no esta en ningún ciclo de G.