Conjuntos y Relaciones

M. C. Jorge Antonio García Galicia.

9 de agosto del 2011

Conjunto

- El concepto de conjunto sera para nosotros un *concepto primitivo*.
- Un conjunto esta formado por elementos.
- Para describir un conjunto:
    1. Listamos sus elementos.
    2. Enunciamos una regla que define a todos sus elementos.

Notación

Tomaremos algunas convenciones:

- Usaremos letras mayúsculas para denotar los conjuntos.
- Letras minúsculas para denotar los elementos de los conjuntos.
- Usaremos $a \in V$ para denotar que a es un elemento del conjunto V.
- Y usaremos $a \notin V$ para denotar que a no es un elemento del conjunto V.
- Para decir que U consta de los elementos u_1, u_2 y u_3, escribiremos $U = \{u_1, u_2, u_3\}$.
- Utilizaremos $\mathbb{N}$ para denotar el conjunto de los números naturales.

Ejemplos de conjuntos

Podemos definir al conjunto V

$$V = \{v_i | 1 \leq i \leq 100 \text{ y } i \in \mathbb{N}\}$$

Y estas dos definiciones son equivalentes:

1. $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{100}\}$
2. $V = \{v_i | i = 1, 2, \ldots, 100\}$

Subconjuntos e igualdad en conjuntos

- Si U y V son conjuntos con la propiedad de que cada elemento de U es un elemento de V, entonces diremos que U es un subconjunto de V y lo denotaremos $U \subseteq V$.
- Si U y V tienen exactamente los mismos elementos, entonces U y V son conjuntos iguales, y lo escribimos $U = V$.
- El enunciado $U = V$ es equivalente a decir $U \subseteq V$ y $V \subseteq U$.

De acuerdo a lo anterior:

$$\{u_1, u_2, u_2\} = \{u_1, u_2\} = \{u_2, u_1\}$$

- Si $U \subseteq V$ y $U \neq V$, diremos que U es un subconjunto propio de V.

Conjuntos especiales y complementos

- Al conjunto que no contiene ningún elemento, lo llamaremos el conjunto vacío y lo denotaremos como $\emptyset$.
- Para todo conjunto W es trivialmente cierto que: $\emptyset \subseteq W$.

Algunas veces se hace la suposición de que todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto predefinido llamado el conjunto universal.

Si U llegára a denotar al conjunto universal y S fuéra algún subconjunto de U, entonces el complemento de S, denotado por $\overline{S}$ es el conjunto de todos los elementos de U que no están en S. Es decir:

$$\overline{S} = \{x \in U | x \notin S\}$$

Operaciones con conjuntos

Dados dos conjuntos U y V

- La unión de U y V, consiste en todos los elementos que están en U o en V (o en ambos) y se denota como $U \cup V$.
- La intersección de U y V, denotada $U \cap V$ consiste en todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos U y V.
- Si $U \cap V = \emptyset$ diremos que U y V son disjuntos.

Por ejemplos si:

$$U = \{u_1, u_2, u_3\} \; V = \{u_1, u_3\} \; W = \{u_2, u_4\}$$

Entonces:
$U \cup W = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $U \cap W\{u_2\}$ y $V \cap W = \emptyset$.

Teorema: (Leyes de DeMorgan)

Sea U el conjunto universal y sean A y B subconjuntos de U. Entonces:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Ejercicios: I

1. Cuantos elementos contiene el siguiente conjunto:

$$U = \{u_i | 1 < i < 10 \text{ con } i \in \mathbb{N}\}$$

.

2. Sean U, V y W conjuntos no vacíos y suponga que para cada elemento $w \in W$, ya sea $w \in U$ o $w \in V$. Demuestra que $W \subseteq U \cup V$.
3. Sea $V_1 = \{v_1, v_3, v_4\}$, $V_2 = \{v_2, v_5\}$, $V_3 = \{v_1, v_3\}$ y $V_4 = \{v_3, v_4\}$. Determina la unión y la intersección de todos los pares de conjuntos. ¿Cuáles de ellos son disjuntos?.
4. Sean U, V y W conjuntos tales que $U \subset V$ y $V \subseteq W$. Demuestra que $U \subset W$

Producto cartesiano

- Denotamos (u_1, u_2). Para referirnos a un par ordenado. En este par el primer elemento es u_1 y el segundo es u_2.
- El producto cartesiano $V \times W$ de dos conjuntos V y W es el conjunto de todos los pares ordenados (v, w) tales que $v \in V$ y $w \in W$.
- En símbolos $V \times W = \{(v, w) | v \in V \text{ y } w \in W\}$.
- Sea $|S|$ el número de elementos del conjunto S, también llamado la cardinalidad.
- Se sigue de las definiciones anteriores que $|V \times W| = |W| \cdot |V|$.

Relaciones

- Una relación en un conjunto V, es cualquier subconjunto de $V \times V$.
- Si $|V| = n$ entonces una relación en V puede tener a lo mas n^2 elementos. Y puede tener a lo menos cero elementos. (relación vacía).
- Por ejemplo, supongamos $V_0 = \{a, b, c\}$ una posible relación R en V puede ser:

$$R = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, b)\}$$

Decimos en el caso anterior que aRb si $(a, b) \in R$ o bien decimos que $a \not R b$ para decir que $(a, b) \notin R$.

Reflexividad

Definición: (Relación reflexiva)

Una relación R en un conjunto V es reflexiva si para todo $x \in V$, el par ordenado (x, x) pertenece a R.

- Si $V_0 = \{a, b, c\}$ entonces cualquier relación reflexiva debe incluir los pares (a, a), (b, b) y (c, c).

Irreflexividad

Definición: (Relación irreflexiva)

Una relación R en un conjunto V es irreflexiva si para todo $x \in V$, el par ordenado (x, x) no pertenece a R.

- Si $V_0 = \{a, b, c\}$ entonces cualquier relación irreflexiva no puede incluir los pares (a, a), (b, b) y (c, c).
- El hecho de que una relación no sea reflexiva no la hace irreflexiva. Por ejemplo en el conjunto $V_1 = \{y, z\}$ la relación $S = \{(y, y), (y, z)\}$ no es reflexiva, ni tampoco es irreflexiva.

Simetría

Definición: (Relación simétrica)

Una relación R en un conjunto V es simétrica si para todo $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$.

- Para que una relación R en V no sea simétrica, debe ocurrir que exista un par $(a, b) \in R$ con $a \neq b$ tal que $(b, a) \notin R$

Definición: (Relación asimétrica)

Una relación R en un conjunto V es asimétrica si para todo $(x, y) \in R$, con $x \neq y$ entonces $(y, x) \notin R$.

Transitividad

Definición: (Relación transitiva)

Una relación R en un conjunto V es transitiva si para todos $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$.

- Si una relación R no es transitiva, entonces existen pares ordenados $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ tales que $(a, c) \notin R$.

Ejercicios I

1. ¿Cuales de las siguientes relaciones tienen las propiedades de reflexividad, simetría o transitividad?
    1. "Es paralelo a" en el conjunto de todas las rectas del plano.
    2. "Esta a menos de 100km de distancia de" en el conjunto de todas las ciudades del mundo.
    3. "Es la hermana de" en el conjunto de todas las personas vivientes del mundo.
2. Sea $V = \{a, b, c, d\}$ y sea $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$ ¿Qué propiedades (reflexiva, irreflexiva, simétrica, antisimetrica, transitiva) posee la relación?
3. Sea $V = \{a, b, c, d\}$. Da un ejemplo de una relación en V que no sea reflexiva, ni simétrica ni transitiva.
4. Sea $V = \{a, b, c\}$ da un ejemplo de una relación en V que sea:

Ejercicios II

1. reflexiva y simétrica, pero no transitiva.
2. reflexiva y transitiva, pero no simétrica.
3. simétrica y transitiva, pero no reflexiva.