El teorema de los cuatro colores

M. C Jorge García.

El problema de colorear mapas.

> La teoría de grafos es un área de las matemáticas cuyo pasado esta siempre presente.
>
> Chromatic Graph Theory
> Gary Chartrand

- El 23 de octubre de 1852 un estudiante llamado Frederick Guthrie fué a visitar a su profesor de matemáticas, el famoso Agust De Morgan, para comunicarle un descubrimiento que su hermano mayor Francis Guthrie -un cartógrafo- había hecho.

Observación: (La conjetura de los cuatro colores)

Las regiones de cualquier mapa pueden colorearse, con cuatro colores o menos, de tal manera que cualesquiera dos regiones adyacentes tengan diferente color.

Un teorema complicado

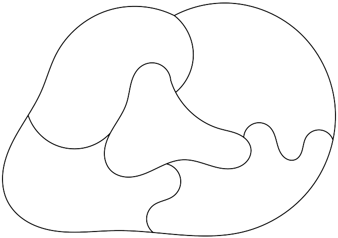
- Los hermanos Guthrie había llegado a una prueba, pero no estaban satisfechos con el resultado.
- De Morgan encontró una falla en la prueba y después de varios intentos de encontrar una demostración le escribió a uno de sus colegas. Sir Richard Howard Hamilton.
- Sin embargo Hamilton respondió de manera poco entusiasta ante la conjetura[1].
- El problema permaneció abierto durante muchos años.
- No fue si no hasta 1976 que Kenneth Appel y Wolfgang Haken, llegaron a una demostración.

[1] "No tengo interés en su quaternio de colores"

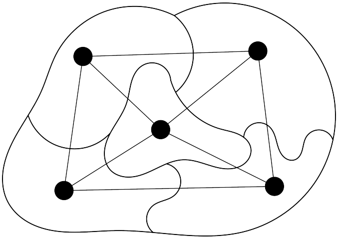
Un problema de teoría de grafos I

- A todo mapa le podemos asociar un grafo.
- En cada región colocamos un vértice.
- Luego hacemos dos vértices adyacentes si y solo si las dos regiones son adyacentes. Es decir tienen una arista común en sus fronteras.
- Si las fronteras comparten un solo punto, no se consideran adyacentes.
- A este grafo se le conoce como el grafo dual del mapa.
- Claramente los grafos duales de los mapas son grafos planos.
- Mas aún, todos los grafos planos son grafos duales de algún mapa.

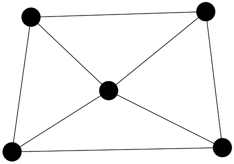
Un problema de teoría de grafos II



(a) Mapa



(b) Mapa y grafo



(c) Grafo

Figura: Un mapa y su correspondiente grafo dual.

El teorema de los cuatro colores

- Ahora podemos plantear el problema de los cuatro colores como un problema de teoría de grafos.

Teorema: (De los cuatro colores)

Para todo grafo aplanable G:

$$\chi(G) \leqslant 4$$

- La prueba de este teorema de Haken y Appel, fue hecha al reducir todos los grafos planos a un número finito de configuraciones (1482 conjuntos irreducibles).
- Luego encontraron mediante una computadora coloraciones validas para cada configuración.
- Muchos matemáticos ven con escepticismo la prueba de Haken y Appel.

Un chiste del día de los inocentes

- El primero de abril de 1975 en un artículo de la la revista Scientific American, un famoso filosofo y escritor de matemáticas enuncio que existía un contraejemplo del teorema de los cuatro colores.

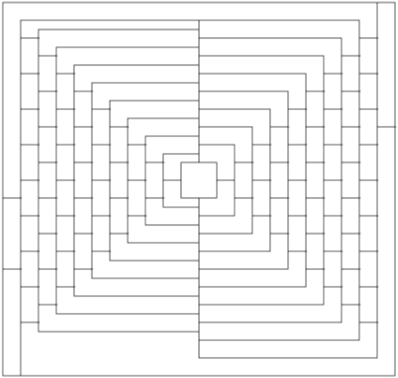


Figura: Mapa publicado por Martín Gardner

Un resultado curioso

Teorema:

Todo grafo aplanable G contiene un vértice $v \in V(G)$ tal que $\deg_G v \leqslant 5$.

- Este resultado llevó a la demostración de un teorema parecido al de los cuatro colores.

Teorema: (De los cinco colores)

Para todo grafo aplanable G:

$$\chi(G) \leqslant 5$$

Falsas esperanzas

- Como puede verse de la demostración anterior, si podemos garantizar que en todo grafo plano G existe un vértice v tal que $\deg_G v \leqslant 4$, la prueba puede usarse para demostrar el teorema de los cuatro colores.
- Durante mucho tiempo se pensó que este era el camino a seguir.

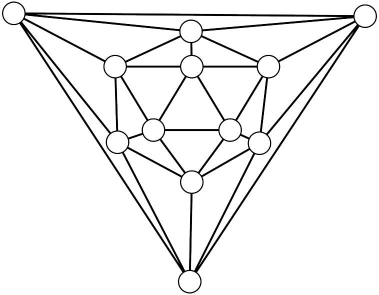


Figura: Hasta que se encontró este contra ejemplo

Situación actual

- La prueba de Haken y Appel es universalmente aceptada hoy día.
- El teorema de los cuatro colores se considera demostrado.
- Sin embargo, el uso de computadoras para hacer demostraciones sigue siendo una controversia.
- Hay un nuevo problema planteado por los puristas de las matemáticas.

Observación:

¿Es posible encontrar una demostración no asistida por computadora del teorema de los cuatro colores?