Caminos Eulerianos

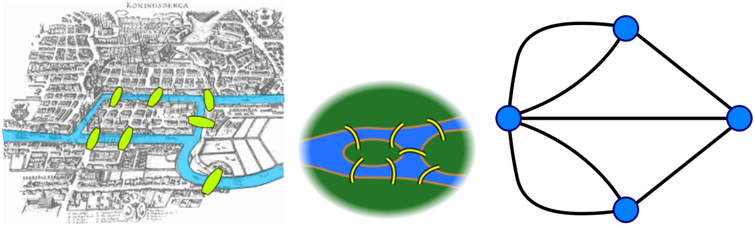
M. C Jorge García.

Los puentes de Königsberg

- En el pueblo de Königsberg al este de Prusia había en el siglo XVIII siete puentes que cruzaban el río Pregel.
- El desaparecido estado de Prusia es ahora parte de Alemania. El pueblo de Königsberg es ahora la ciudad conocida como Kaliningrado.
- Los puentes conectaban dos islas entre ellas y a cada isla con las orillas del río Pregel. Los habitantes de Königsberg se hicieron la siguiente pregunta ¿Es posible cruzar los siete puentes en una caminata continua sin cruzar algún puente mas de una vez?
- Este problema fue resuelto por primera vez en 1736 por Euler en un articulo llamado: *Solutio problematis ad geometriam situs pertenentis*.

El problema de los puentes de Königsberg

- ¿Es posible hacer un paseo que contenga todas las aristas en este grafo?



(a) Königsberg (b) Puentes (c) Multigrafo

Figura: Problema de los puentes de Königsberg modelado como un multigrafo.

Multigrafos

- El problema ahora consiste en saber si el multigrafo de la figura 1(c) tiene un paseo (posiblemente un paseo cerrado) que contenga todas sus aristas.

Teorema:

El multigrafo M de la figura 1(c) no tiene ningún paseo que contenga todas sus aristas.

Grafos Eulerianos

- El problema anterior dio origen a una clase de grafos (de hecho multigrafos) que llevan el nombre de Euler.

Definición: (Circuito euleriano)

Un circuito que contiene todos los vértices de un multigrafo M es un circuito euleriano. A un multigrafo M que contenga al menos un circuito euleriano se le llama multigrafo (grafo) euleriano.

Ejemplo

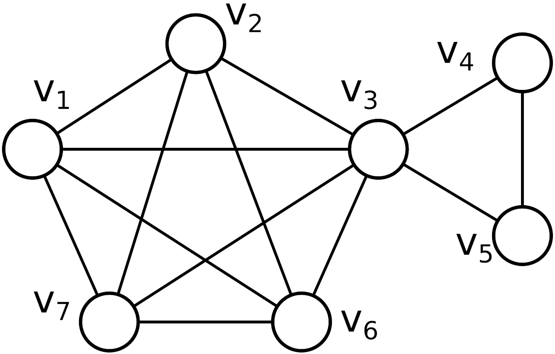


Figura: Este grafo es Euleriano. Un posible circuito euleriano es $C : v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_6, v_7, v_1, v_3, v_7, v_2, v_6, v_1$

Teorema de Euler

Teorema: (Teorema de Euler)

Un multigrafo G es euleriano si y solo si G es conexo y todos sus vértices son pares.

Grafos transversos

- Un multigrafo G que contiene una trayectoria, no un circuito, que contiene todos los vértices y todas las aristas de G se le llama grafo transverso y a la trayectoria se le llama trayectoria euleriana (o paseo euleriano).

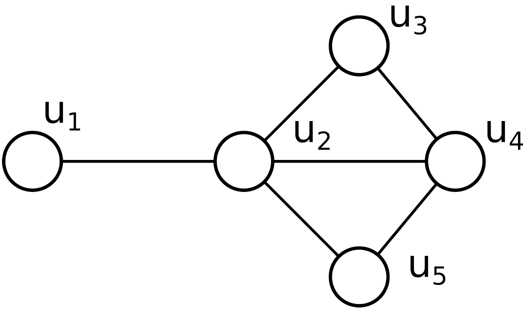


Figura: Este grafo es transverso. Una posible trayectoria euleriana es $T: u_1, u_2, u_4, u_3, u_2, u_5, u_4$

Caracterización de los grafos transversos

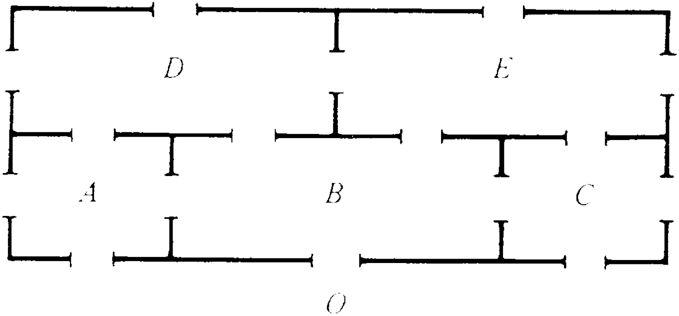
Teorema:

Un multigrafo G es transverso si y solo si G es conexo y tiene exactamente dos vértices nones. Aun más, cualquier trayectoria euleriana debe comenzar en uno de los vértices nones y terminar en el otro.

- Una propiedad interesante de los grafos transversos es que una vez que los vértices están dibujados podemos dibujar las aristas en un movimiento continuo. O sin levantar el lápiz del papel.
- Los grafos Eulerianos y transversos tiene muchas aplicaciones al resolver acertijos, o laberintos y problemas similares.

Ejemplo 1

- La figura muestra una casa con varios accesos entre cuartos y entre algunos cuartos y el exterior. ¿Es posible iniciar en algún lugar y caminar por todas las puertas una y solo una vez?



Ejemplo 2

- Tienes un trabajo de verano como inspector de carreteras. Entre varias responsabilidades debes recorrer las autopistas que se muestran en la figura periódicamente, para verificar su estado y ubicar posibles reparaciones. Si tu vives en el pueblo A. ¿Es posible encontrar un viaje redondeo que comience y termine en A que pase por todas las carreteras exactamente una vez? ¿Si vivieras en el pueblo B es posible tal ruta?