Grado de un vértcie

M. C Jorge García.

30 de agosto del 2011

Vecindad

Definición: (Vecindad)

En un grafo G la *vecindad* *$N(v)$ de un vértice $v \in V(G)$ es el conjunto de los vértices adyacentes a v.*

$$N(v) = \{u | u \in V(G) \text{ y } uv \in E(G)\}$$

Definición: (Vecindad cerrada)

La *vecindad cerrada* *de un vértice $v \in V(G)$ es el conjunto resultado de unir el vértice v con su vecindad. $\{v\} \cup N(v)$*

El grado de un vértice

Definición: (Grado de un vértice)

Sea G un grafo el grado $\deg_G v$ de un vértice $v \in V(G)$ es el número de aristas $e \in E(G)$ que inciden en v.

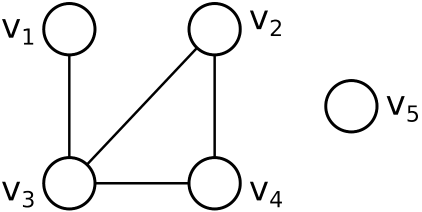
- Si el grafo G es claro por contexto, denotamos el grado de $v \in V(G)$simplemente como $\deg v$.
- El grado de un vértice coincide con la cardinalidad de su vecindad. Es decir: $\deg_G v = |N(v)|$

Notación

- Un vértice $v \in V(G)$ tal que $\deg_G v = 0$, se le llama un vértice aislado.
- Un vértice $v \in V(G)$ tal que $\deg_G v = 1$, se le llama hoja o vértice terminal.
- El grado mayor entre todos los vértices de G se le llama el grado máximo y se denota $\Delta(G)$.
- El menor grado entre todos los vértices de G se le llama el grado mínimo y se denota $\delta(G)$.
- Si G es un grafo de orden p y $v \in V(G)$ entonces:

$$0 \leq \delta(G) \leq \deg_G v \leq \Delta(G) \leq p - 1$$

Ejemplo



En el grafo de la figura: $\deg v_1 = 1$, $\deg v_2 = 2$, $\deg v_3 = 3$, $\deg v_4 = 2$ y $\deg v_5 = 0$.

Primer Teorema de Grafos

Teorema: (Lema del handshaking)

Sea G un grafo de orden p y tamaño q, con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_p$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg_G v_i = 2q$$

- Este hecho fue observado por Euler en 1768.
- Algunos le han llamado a este teorema el primer teorema de la teoría de grafos.
- Otros le llaman el lema de *handshaking* (apretón de manos).
- Euler no utitlizó ninguno de esos nombres para referisre a este hecho.

Vértices pares y nones

Sea un grafo G

- Si $v \in V(G)$ tiene la particularidad de $\deg_G v \equiv 0 \pmod{2}$ se le llama un vértice par.
- Si $v \in V(G)$ tiene la particularidad de $\deg_G v \equiv 1 \pmod{2}$ se le llama un vértice non.

Teorema:

Todo grafo G tiene un número par de vértices nones.

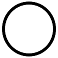
Teorema:

Todo grafo G contiene al menos dos vértices con el mismo grado.

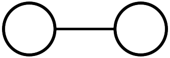
Grafos regulares

- Si todos los vértices de un grafo G tienen el mismo grado r, se dice que G es un grafo regular de grado r o r-regular
- Un grafo es completo si cada par de vértices es adyacente.
- Un grafo completo de orden p, debe ser $(p-1)$-regular. Y se denota K_p

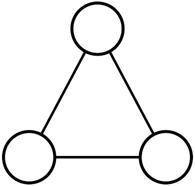
Grafos completos



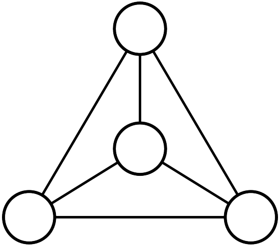
(a) K_1



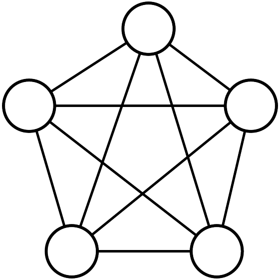
(b) K_2



(c) K_3



(d) K_4



(e) K_5