

# Grafos y Redes

M. C Jorge García.

23 de agosto del 2011

# Grafo

## Definición: (Grafo)

Un *grafo*  $G$  es un conjunto finito  $V \neq \emptyset$  junto con una relación irreflexiva y simétrica  $R$  en  $V$ .

Algunas definiciones extra:

- A los elementos del conjunto  $V$ , se les llama **vértices**.
- Al conjunto de los **pares simétricos** definidos por  $R$  se le denota como  $E$ .
- A los elementos del conjunto  $E$  se les llama **aristas**.
- Es también común (aunque nosotros no lo haremos en el curso) llamar a los vértices nodos o puntos y a las aristas arcos o líneas.

# Ejemplo

Sea el grafo  $G$  definido por el conjunto

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

Junto con la relación

$$R = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$$

En este caso

$$E = \{\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\}, \{(v_1, v_3), (v_3, v_1)\}, \\ \{(v_2, v_3), (v_3, v_2)\}, \{(v_3, v_4), (v_4, v_3)\}\}$$

# Notación I

En un grafo  $G$

- Al número de vértices de  $G$  se le conoce como el **orden** de  $G$ , es decir  $|V| = \text{orden}$ .
- El número de aristas en  $G$ , es decir al número de elementos del conjunto  $E$  (cada uno formado por un par simétrico) se le llama el **tamaño** de  $G$ . Es decir  $|E| = \text{tamaño}$ .
- Es común definir un grafo en términos de  $V$  y de  $E$ .
- A veces, si hay ambigüedad, tomaremos la notación.  $G = (V, E)$  o  $G(V, E)$ .
- Si hay mas de un grafo en discusión, también denotaremos  $V(G)$  (alternativamente  $E(G)$ ), para decir que  $V$  (alternativamente  $E$ ) es el conjunto de vértices (alternativamente aristas) de  $G$ .
- A un grafo de orden uno, le llamamos **grafo trivial**.

# Notación II

- A un grafo de tamaño cero, le llamamos **grafo vacío**.

# Aristas

- Dado que sabemos de antemano que la relación es irreflexiva y simétrica, el conjunto de aristas  $E$  determina totalmente la relación  $R$ .
- Como  $E$  es un conjunto de pares simétricos, en un abuso de notación si  $\{(u, v), (v, u)\} \in E$  denotaremos a esa arista como  $uv$ .
- Por simetría es indiferente denotar a una arista  $e$  como  $uv$  o como  $vu$ .

Ejemplo:

$$E = \{ \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\}, \{(v_1, v_3), (v_3, v_1)\}, \}$$

$$\{ \{(v_2, v_3), (v_3, v_2)\}, \{(v_3, v_4), (v_4, v_3)\} \}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\}$$

# Grafos como diagramas

Es muy común que a los grafos los representemos con un diagrama. En donde...

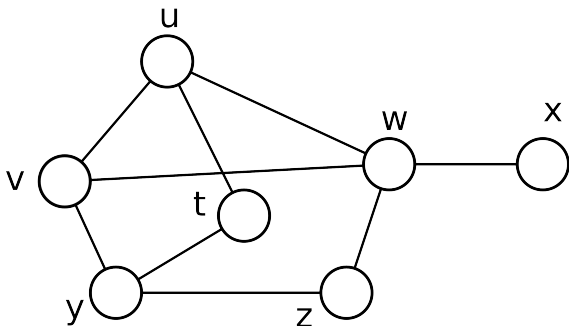
- A los vértices los representamos por un punto, o pequeños círculos, o circunferencias.
- A las aristas por medio de líneas rectas o curvas, que unen los vértices que relacionan.

## Grafo

$$G(V, E)$$

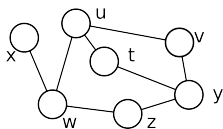
$$V = \{v, u, t, w, x, y, z\}$$

$$E = \{vu, ut, ty, yv, vw, uw, yz, zw, wx\}$$

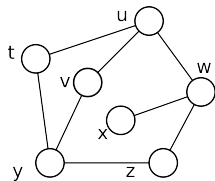


# Diagramas de grafos

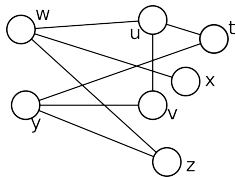
- Para un grafo  $G = (V, E)$ , hay muchas formas de hacer su diagrama.



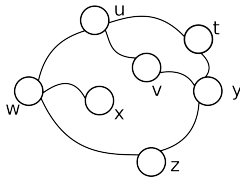
(a)



(b)



(c)



(d)

# Consideraciones

Dado que el diagrama de un grafo  $G = (V, E)$  determina totalmente  $E$  y  $V$ , **se considera al diagrama como  $G$  mismo.**

- Al dibujar grafos, que dos aristas se intersequen es permisible (de hecho, podría ser inevitable) pero no deben confundirse estas intersecciones con vértices.
- Los vértices siempre se muestran como puntos, círculos o circunferencias.
- A veces en español algunos autores les llaman a los grafos, gráficas.
- Según nuestra conveniencia a veces le pondremos nombre a los elementos de  $V$ , o a los elementos de  $E$  o a ambos.

# Definiciones I

## Definición: (Unión entre vértices)

En un grafo  $G$  si  $e = uv \in E(G)$  se dice que  $e$  **une** a los vértices  $u$  y  $v$ .

## Definición: (Adyacencia entre vértices)

En un grafo  $G$  si dos vértices  $u$  y  $v$  están unidos, diremos que son **adyacentes**.

- En un grafo  $G$  si  $uv \notin E(G)$  se dice que los vértices  $u$  y  $v$ , no son adyacentes.

# Definiciones II

Definición: (Adyacencia entre aristas)

Si  $uv$  y  $uw$  son aristas diferentes de un grafo  $G$ , entonces  $uv$  y  $uw$  son **aristas adyacentes**.

Definición: (Incidencia)

Si en un grafo  $G$  existe una arista  $e = uv \in E(G)$ , se dice que  $e$  es **incidente** en  $u$  (y también es incidente en  $v$ ).

# Ejercicios I

- 1 Dibuja el grafo  $G$  con conjunto de vértices  $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  y conjunto de aristas  $E = \{u_1u_2, u_1u_4, u_1u_5, u_2u_3, u_3u_5, u_4u_5\}$ . ¿Cual es la correspondiente relación irreflexiva y simétrica? ¿Cual es el tamaño de  $G$ ? ¿Cual es el orden de  $G$ ?
- 2 Dibuja un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  y conjunto de aristas  $E$  tal que  $|E|$  es lo mas grande posible.
- 3 Si un grafo  $G$  tiene orden 3. ¿Cuales son los tamaños posibles de  $G$ ?
- 4 ¿Existe un ejemplo de un grafo  $G$  de orden 3, tal que cada par de vértices es adyacente y cada par de aristas es adyacente?
- 5 Sea  $n \geq 2$  un entero. Si  $G$  es un grafo de orden  $n$  ¿Cual es el

# Ejercicios II

- 6 mínimo tamaño posible para  $G$  (en términos de  $n$ ) si  $G$  contiene un vértice que es adyacente a todos los otros vértices de  $G$ ?
- 7 Da un ejemplo de un grafo que exhiba las siguientes propiedades:
  - 1 Cada vértice es adyacente a dos vértices.
  - 2 Cada arista es adyacente con dos aristas.

# Dígrafos

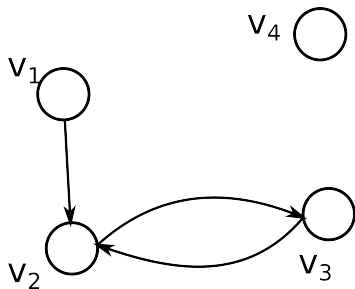
## Definición:

*Dígrafo* Un grafo dirigido  $D$  (también llamado **dígrafo**) es un conjunto finito  $V \neq \emptyset$  junto con una relación irreflexiva  $R$  en  $V$ .

- A cada par ordenado en  $R$  le llamamos **arista dirigida**.
- Por consistencia es común denotar a  $R$  como  $E$ .

# Diagrama en dígrafos

- Dado que la relación no necesariamente es simétrica. Puede suceder que  $(u, v) \in R$  y  $(v, u) \notin R$ .
- En el diagrama, si  $(u, v) \in R$  dibujamos una línea en forma de flecha que *dirige* la arista.



## Ejercicios

- 1 Dibuja el dígrafo cuyo conjunto de vértices es  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y cuyo conjunto de aristas dirigidas es:  $E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6)\}$
- 2 ¿Cual es el número máximo posible de aristas dirigidas para un dígrafo de con. . .
  - 1 3 vértices?
  - 2 4 vértices?
  - 3 5 vértices?
  - 4  $n$  vértices?

## Redes

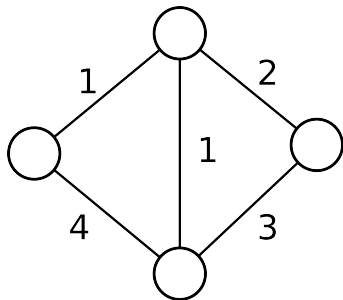
## Definición: (Red)

Una **red** es un grafo  $G$  junto con una función  $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ .

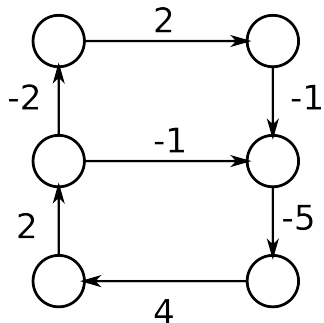
## Definición: (Red dirigida)

Una **red dirigida** es un dígrafo  $D$  junto con una función  $f : E(D) \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Ejemplo de Redes



(a) Red



(b) Red dirigida

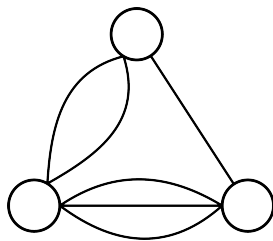
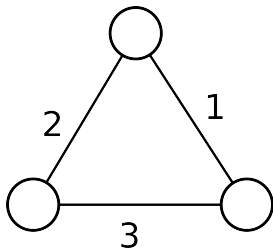
# Un caso especial

- Es muy común tener redes cuyos valores funcionales son números enteros.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$$

$$f = \{(v_1v_2, 2), (v_1v_2, 1), (v_1v_2, 3)\}$$



# Multígrafos

- Cuando una red es representada de la segunda forma comúnmente le llamamos **multígrafo**.
- Y a las aristas cuyo valor funcional es mayor que uno les llamamos **aristas múltiples**.