

Trayectorias Hamiltonianas

M. C Jorge García.

El origen del problema

- Sir William Rowan Hamilton inventó un acertijo en 1857. Además de los cuaterniones, el término vector y de importantes aportaciones en la física y en las matemáticas.



Figura: Un juego de Hamilton en el museo de los puzzles. Fue donado en 2006 y se desconoce su edad.

Definición: (Trayectoria hamiltoniana)

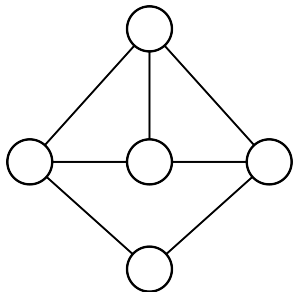
Una trayectoria T que contiene todos los vértices de un grafo G se llama **trayectoria (camino) hamiltoniano**.

Definición: (Ciclo hamiltoniano)

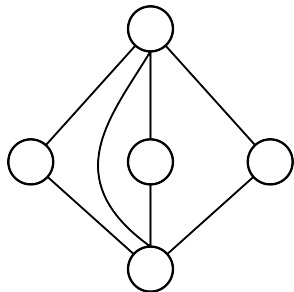
Un ciclo C que contiene todos los vértices de un grafo G se llama **ciclo hamiltoniano**.

Definición: (Grafo hamiltoniano)

Un grafo G se dice **grafo hamiltoniano** si contiene al menos un ciclo hamiltoniano.



(a) G_1



(b) G_2

Figura: El grafo G_1 es hamiltoniano, mientras que el grafo G_2 no lo es.

- No se conoce una manera efectiva (polinomial) de verificar condiciones necesarias y suficientes para que un grafo sea hamiltoniano.
- En efecto el problema de saber si un grafo es o no hamiltoniano y el problema de saber si contiene un ciclo hamiltoniano son ambos NP-completos.

Teorema: (de Dirac)

Si G es un grafo de orden $p \geq 3$ tal que $\deg_G v \geq \frac{p}{2}$ para todo vértice v de G , entonces G es hamiltoniano.

El problema del agente viajero

Un agente viajero tiene que salir de su ciudad visitar una lista de ciudades exactamente una vez cada una y luego regresar a casa. Se conocen los costos de viajar entre cada par de ciudades. ¿Cuál es la ruta de costo mínimo que debe seguir el agente viajero?

Definición: (El problema del agente viajero (TSP))

Dada una red formada por un grafo completo K_p junto con una función $f : E(K_p) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Se desea encontrar un ciclo hamiltoniano C tal que el costo $\sum_{i=1}^p f(e_i)$ donde $e_i \in C$ es el mínimo posible.

- El TSP es uno de los problemas mas famosos de todas las matemáticas.
- Fue planteado en 1930 y es al problema mas estudiado en la investigación de operaciones.
- Se sabe que es un problema **NP-duro** (*NP-hard*).
- Aunque no tenemos un algoritmo **determinista** para resolverlo, tenemos varias heurísticas para aproximar una solución en tiempos muy aceptables $O(n)$.
- Es tan importante que a menudo se usa como **benchmark** para evaluar alguna técnica computacional.
- Además de las heurísticas tenemos varios métodos de enumeración eficiente para resolverlo en complejidades no tan altas $O(n^2 2^n)$.
- Algunas técnicas de enumeración directa para resolverlo son:

- Programación dinámica.
- Fuerza bruta.
- El algoritmo de Held–Karp.
- Inclusión exclusión.
- Todas las filosofías de *brach and bound*.
- Programación lineal.
- Algunas técnicas para aproximar una buena solución son:
 - Algoritmo greedy.
 - Algoritmos genéticos.
 - Swarm intelligence.
 - Computación evolutiva.
 - Redes neuronales.
 - Colonización de hormigas.
 - Entropía cruzada.
 - Búsqueda Tabú.
 - Recosido simulado.

- Este problema es tan famoso que a menudo se usa en varios chistes o hoax de internet.
- Es el problema NP-duro y NP-completo por excelencia.
- Varios libros famosos dedican capítulos enteros al TSP.

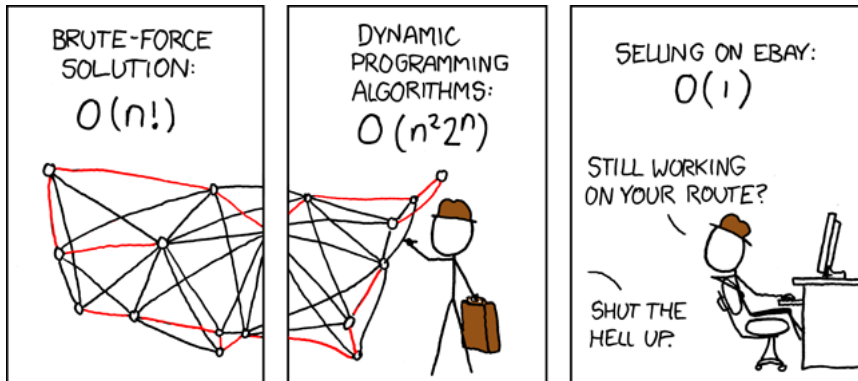


Figura: What's the complexity class of the best linear programming cutting plane techniques? I couldn't find it anywhere. Man, the Gardfield guy doesn't have this problems. <http://xkcd.com>

Complejidad en problemas

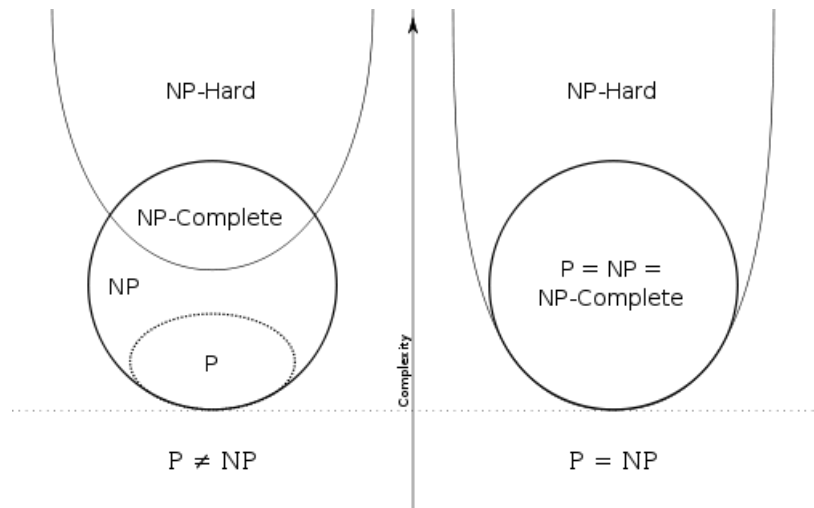


Figura: Un diagrama de contención de las complejidades computacionales.

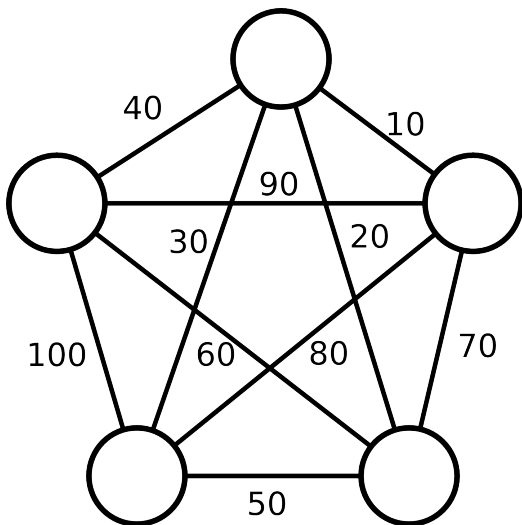


Figura: El algoritmo greedy puede fallar aun en grafos muy simples.

El recorrido del caballo

- Un problema famoso de ajedrez que tiene que ver con ciclos hamiltonianos es el problema del recorrido del caballo.
- ¿Puede el caballo siguiendo las reglas estándar del ajedrez visitar todos los cuadros de un tablero de ajedrez, con la condición de que debe pasar cada cuadro exactamente una vez?

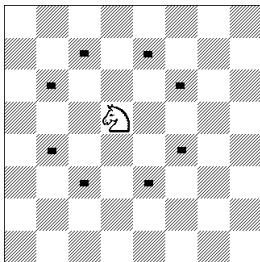


Figura: Los movimientos válidos del caballo en el ajedrez.

- Nadie sabe quién fue el que propuso este problema. Pero hay indicios que ya se trabajaba en el siglo IX.
- En inglés es conocido como *knight's tour problem*. Y es un problema clásico que se deja resolver a los estudiantes de ciencias de la computación.
- Si el caballo se mueve por todas las casillas y termina en una casilla que ataca la casilla en donde comenzó decimos que el recorrido es cerrado. Si solo se mueve por todas las casillas sin cumplir esa restricción es un recorrido abierto.
- Se sabe que en un tablero normal de ajedrez hay 13267364410532 recorridos cerrados.
- Es una instancia del problema de encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo. Por lo tanto es NP-completo.
- Un caballo puede tener 4×10^{51} formas de moverse, por lo que un algoritmo de fuerza bruta no es posible.

Una posible solución

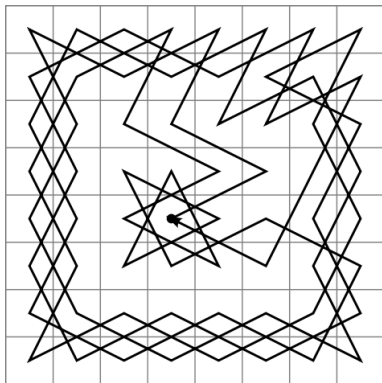


Figura: Un recorrido cerrado en un tablero estándar encontrado por una heurística.

- Se conocen varias heurísticas de solución. Muchas en tiempos $O(n)$.
- El problema se ha generalizado a buscar tour en tableros de tamaño $n \times m$.
- Hay condiciones necesarias y suficientes para que estos recorridos existan.
- Una heurística por redes neurales, ha resuelto tableros de tamaño 24×24 .
- La primera (y hasta la fecha una de las mejores) heurística para resolver este problema es la regla de Warnsdorff que data de 1853.

Una solución en un tablero de 24×24

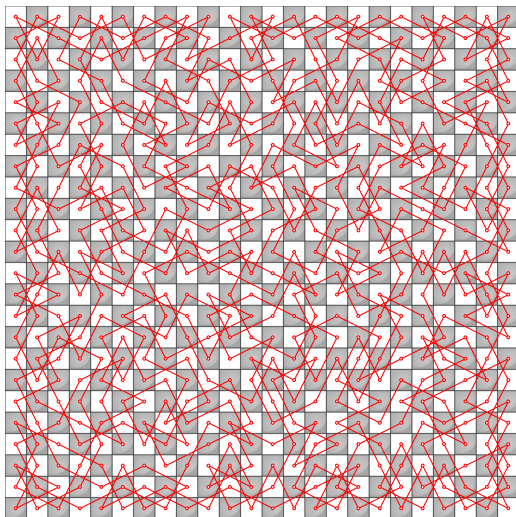
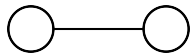


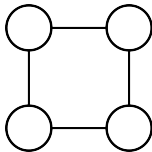
Figura: Una solución por redes neuronales.

Los n -cubos

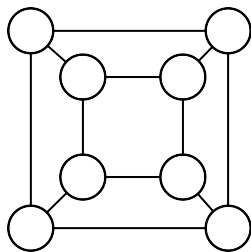
- Un grafo Q_n puede usarse como modelo de computación.
- Cada vértice representa una computadora y cada computadora esta conectada con otra por medio de una arista.
- No todas las computadoras están conectadas entre si. Pero pueden transmitir un mensaje y el id de un receptor y mandar un mensaje por la red a otra computadora.



(a) Q_1



(b) Q_2

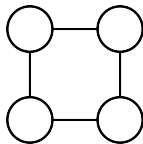


(c) Q_3

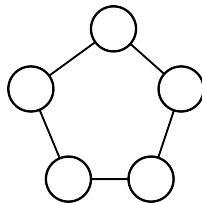
- Otro modelo de hacer redes consiste en hacer redes de anillo.
- Que pueden representarse con los grafos C_n



(d) C_3



(e) C_4



(f) C_5

- Sabemos que el hipercubo Q_n tiene 2^n , vértices.
- ¿Puede Q_n simular una red de anillo con 2^n procesadores?
- ¿Tiene Q_n un ciclo hamiltoniano?
- Una manera alternativa de construir Q_n es:
 - 1 Etiquetar los vértices de Q_{n-1} de con números binarios de n dígitos de tal forma que dos vértices sean adyacentes si y solo si sus etiquetas difieren en un solo dígito.
 - 2 Poner dos copias Q_{n-1}^1 y Q_{n-1}^2 de Q_{n-1} juntas y unir los vértices que tengan la misma etiqueta con una arista. Así tenemos a Q_n
 - 3 Anteponer un 0 a las etiquetas de los vértices que originalmente estaban en Q_{n-1}^1 y anteponer un 1 a las etiquetas de los vértices que originalmente estaban en Q_{n-1}^2

- El n -cubo, con $n \geq 2$ tiene un ciclo hamiltoniano si y solo si existe una sucesión

$$s_1, s_2, \dots, s_{2^n}$$

- Donde cada s_i es una cadena de n bits que satisface.
 - 1 Toda cadena de n bits aparece en un lugar de la sucesión.
 - 2 s_i y s_{i+1} difieren exactamente en un bit, $i = 1, 2, \dots, 2^n - 1$.
 - 3 s_{2^n} y s_1 difieren en exactamente un bit.
- A una sucesión como la antes descrita se le llama **código de Gray**
- Si se muestra que se puede construir un código de Gray para cada entero positivo $n \geq 2$, entonces Q_n tiene un ciclo hamiltoniano.

Teorema:

Sea S_1 la sucesión 0, 1. se define la sucesión S_n en términos de S_{n-1} con las siguientes reglas:

- 1 Sea S_{n-1}^R la sucesión S_{n-1} escrita al revés.
- 2 Sea S_{n-1}^* la sucesión obtenida al colocar un 0 como prefijo en cada miembro de S_{n-1} .
- 3 Sea S_{n-1}^{**} la sucesión obtenida al colocar un 1 como prefijo en cada miembro de S_{n-1}^R .
- 4 Sea S_n la sucesión formada por S_{n-1}^* seguida de S_{n-1}^{**} .

Entonces S_n es un código de Gray para cada entero positivo n .