Representaciones Algebraicas y Operaciones en Grafos

M. C Jorge García.

Matriz de adyacencia

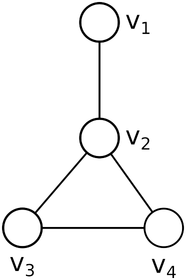
Definición: (Matriz de adyacencia)

Sea G un grafo de orden p con vértices denotados $v_1, v_2, \ldots, v_p$. La matriz de adyacencia $A = A(G) = [a_{ij}]$ es aquella matriz de tamaño $p \times p$ en la cual:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- La matriz de adyacencia es una matriz simétrica.
- Los elementos en la diagonal siempre son ceros. $a_{ii} = 0$ para todo $0 \leqslant i \leqslant p$.

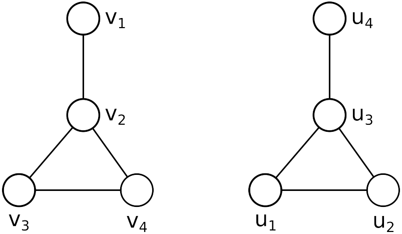
Ejemplo



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de Adyacencia en grafos isomorfos

- La matriz de adyacencia depende de como etiquetemos los vértices de los grafos.



(a) G_1 (b) G_2

Figura: Grafos isomorfos G_1 y G_2.

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potencias de la matriz de adyacencia

Teorema:

Sea A *la matriz de adyacencia de un grafo* G*, donde* $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$*. Entonces la entrada* (i, j) *de la matriz* A^n*, denotada* $a_{i,j}^{(n)}$*, con* $n \geqslant 1$*, es el número de* $v_i v_j$*-caminos diferentes de longitud* n *en* G*.*

Matriz de incidencia

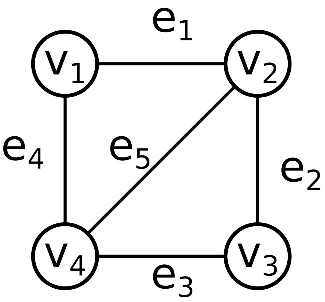
Definición: (Matriz de incidencia)

Sea G un grafo de orden p y tamaño q con vértices denotados $v_1, v_2, \ldots, v_p$ y aristas $e_1, e_2, \ldots, e_q$. La matriz de incidencia $B = B(G) = [b_{ij}]$ es aquella matriz de tamaño $p \times q$ en la cual:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ y } e_j \text{ son incidentes} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo

- En general la matriz de incidencia no es cuadrada.
- En general tampoco es simétrica.
- La suma de cada columna siempre es 2.



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Grafos completos

- Un grafo completo de orden p, se denota K_p y es $(p-1)$-regular y es aquel grafo en donde hay una arista entre cada par de vértices.

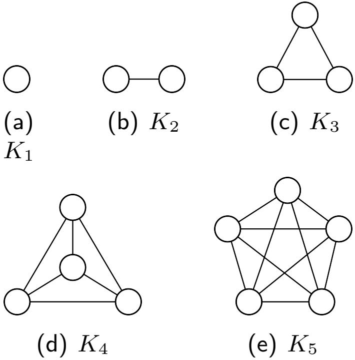
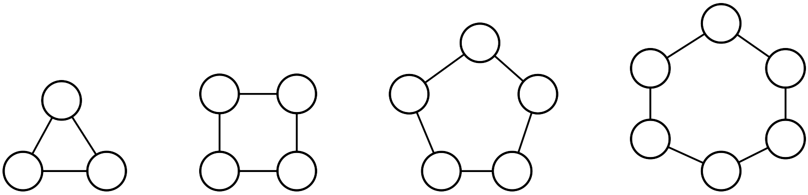


Figura: Grafos completos.

Ciclos

- Un ciclo de orden $p \geqslant 3$, se denota C_p es un grafo conexo $2-regular$ de tamaño $q = p$ que representa un ciclo.



(a) C_3 (b) C_4 (c) C_5 (d) C_6

Figura: Ciclos.

Trayectorias

- Una trayectoria de orden p, se denota T_p es un grafo conexo, de tamaño $q = p - 1$ que representa una trayectoria.

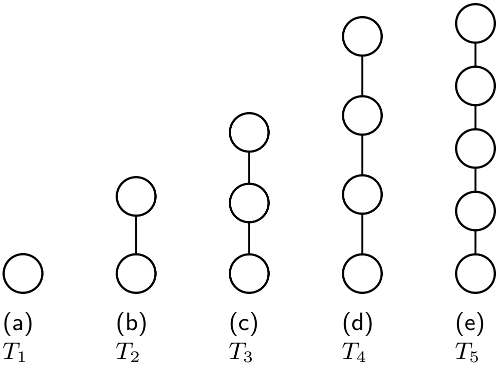


Figura: Trayectorias.

Grafos k-partitos

Definición: (Grafo k-partito)

Un grafo G se dice k-partito si es posible hacer una partición de $V(G)$ en k conjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$(llamados conjuntos partitos) tales que cada $e \in E(G)$ es incidente en un elemento de V_i y en un elemento de V_j con $i \neq j$.

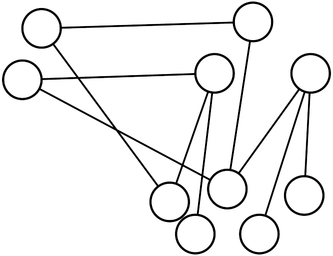


Figura: Grafo 3-partito

Grafos bipartitos

- Cuando en un grafo k-partito $k = 2$, se dice que el grafo es bipartito.
- A los conjuntos V_1, V_2 que hacen la partición de $V(G)$ de un grafo bipartito se les dan muchos nombres dependiendo del área de estudio.
- Algunos nombres típicos son: los hombres y las mujeres, los rojos y los azules, los blancos y los negros.

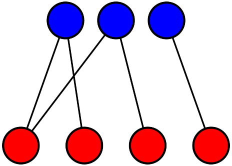
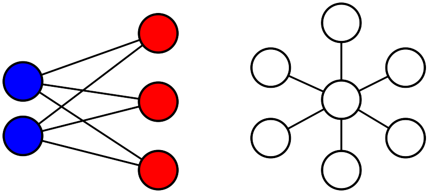


Figura: Grafo bipartito

Grafos bipartitos completos

- Cuando un grafo bipartito G tiene como conjunto de aristas $E(G) = \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$, se dice que es un grafo bipartito completo.
- Un grafo bipartito completo tal que $|V_1| = r$, $|V_2| = s$ se denota K_r^s o bien K_s^r.
- A los grafos $K_1^s = K_s^1$ se les llama también estrellas.



(a) K_3^2 (b) K_1^5

Figura: Grafos bipartitos completos.

Grafos platónicos I

- Un solido platónico es un poliedro convexo regular (en el sentido geométrico).
- Esta demostrado que solo existen cinco solidos platónicos.

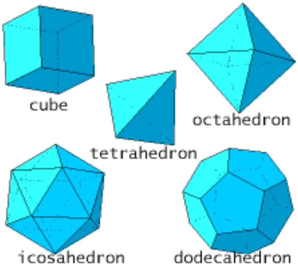
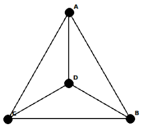


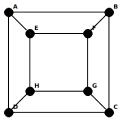
Figura: Solidos Platónicos

Grafos platónicos II

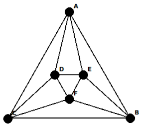
- Un grafo resultado de representar un solido platónico, se le llama un grafo platónico.
- Estos grafos iniciaron la costumbre de llamar a los puntos vértices y a las lineas aristas.



(a) Tetraedro

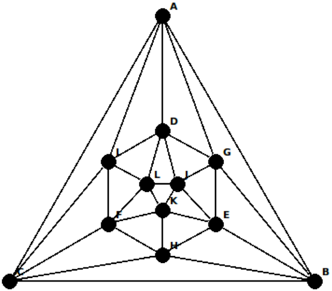


(b) Hexaedro

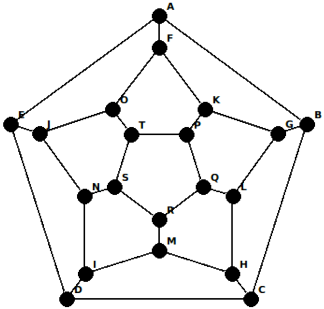


(c) Octaedro

Grafos platónicos III



(d) Dodecaedro



(e) Icosaedro

Figura: Grafos platónicos.

Union

Definición: (Unión)

Sean G_1, G_2 grafos. La unión $G = G_1 \cup G_2$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

- La unión $G_1 \cup G_2$ puede verse simplemente como dibujar G_1 al lado de G_2
- En un abuso de notación a veces diremos kG para decir $\underbrace{G \cup G \cup \ldots \cup G}_{k \text{ veces}}$.

Ejemplo

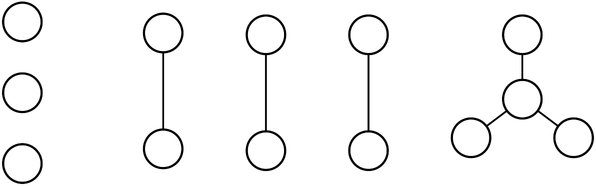


Figura: El grafo $3K_1 \cup 3K_2 \cup K_1^3$

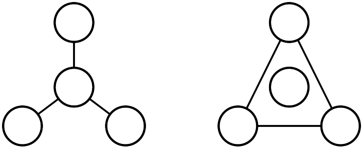
Complemento

Definición: (Complemento)

Sean G un grafo de orden p. El complemento de G se denota $\overline{G}$ y es el grafo $V(\overline{G}) = V(G)$ y aristas
$E(\overline{G}) = \{uv | u, v \in V(G) \text{ y } uv \notin E(G)\}$

- El complemento de G puede pensarse como "el complemento de G con respecto al grafo completo K_p".
- Es fácil ver que $\overline{K_p}$ es el grafo vacío de orden p.

Ejemplo



(a) K_1^3 (b) $\overline{K_1^3}$

Figura: El complemento de un grafo

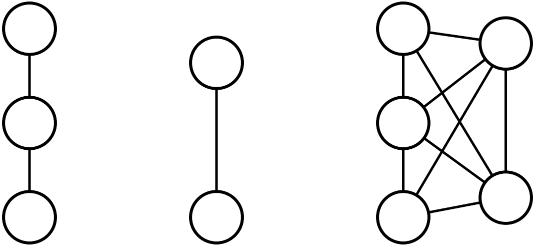
Suma

Definición: (Suma)

Sean G_1 y G_2 grafos. La suma $G = G_1 + G_2$, es el grafo cuyos vértices son $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y aristas $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$.

- Es fácil ver que $K_r^s = \overline{K_r} + \overline{K_s}$.
- Y también $K_{m+n} = K_m + K_n$.

Ejemplo



(a) G_1 (b) G_2 (c) $G_1 + G_2$

Figura: La suma de grafos.

Producto cartesiano

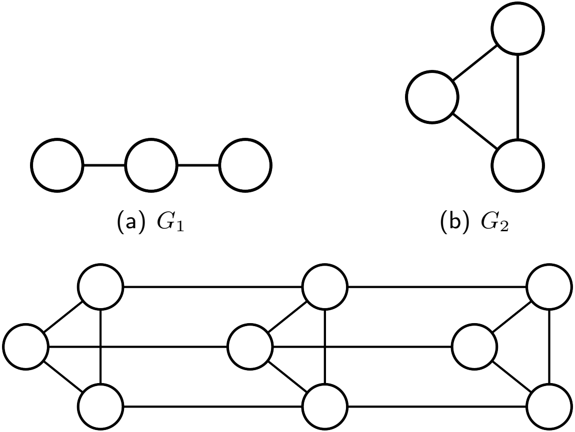
Definición: (Producto cartesiano)

Sean G_1 y G_2 grafos. El producto cartesiano $G = G_1 \times G_2$, es el grafo cuyos vértices son $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ y dos vértices (u_1, u_2), (v_1, v_2) son adyacentes si se cumple cualquiera de estas condiciones.

1. $u_1 = v_1$ y $u_2 v_2 \in E(G_2)$.
2. $u_2 = v_2$ y $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

- Aunque no es de esperarse $G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$.
- El producto cartesiano de grafos es conmutativo.

Ejemplo



(a) G_1 (b) G_2

(c) $G_1 \times G_2$

Figura: El producto cartesiano de grafos.

Los n-cubos

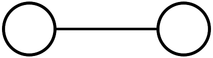
Definición: (n-cubo)

Un n-cubo, para $n \geqslant 1$ es un grafo que se denota Q_n y se define de la siguiente manera:

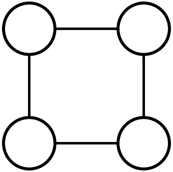
- *Si $n = 1$ entonces es K_2.*
- *Si $n > 1$ entonces es $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$*

- Los n-cubos son grafos n-regulares de orden 2^n.
- También se les llama hipercubos.

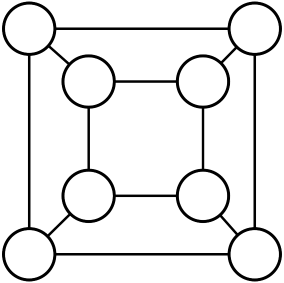
Ejemplo



(a) Q_1



(b) Q_2



(c) Q_3